Algorithmique et Théorie des jeux

Olivier Serre
Olivier.Serre@irif.fr

IRIF (CNRS & Université Paris Diderot – Paris 7)

10 septembre 2018
Semaine d'intégration des L1

Le jeu *Chomp* (David Gale, 1974)

(D. Gale, A curious Nim-type game, Amer. Math. Monthly 81 (1974) 876-879)

Le jeu Chomp est comme la roulette russe mais pour les amateurs de chocolat :-)

On dispose d'une tablette de chocolat dont le carré supérieur gauche est empoisonné. Les joueurs (Eve et Adam) jouent à tour de rôle et Eve commence.
Un coup consiste à choisir un carré de chocolat et à le manger ainsi que tous les carrés qui sont à sa droite et en dessous de lui. Le joueur qui mange le carré empoisonné perd (et meurt dans d'atroces souffrances).

Le jeu *Chomp* (David Gale, 1974)

(D. Gale, A curious Nim-type game, Amer. Math. Monthly 81 (1974) 876-879)

Le jeu Chomp est comme la roulette russe mais pour les amateurs de chocolat :-)

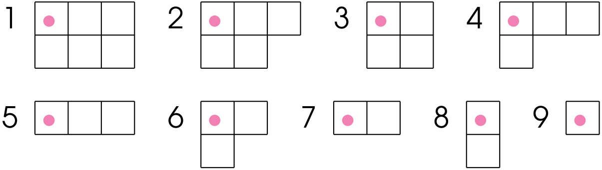
On dispose d'une tablette de chocolat dont le carré supérieur gauche est empoisonné. Les joueurs (Eve et Adam) jouent à tour de rôle et Eve commence.
Un coup consiste à choisir un carré de chocolat et à le manger ainsi que tous les carrés qui sont à sa droite et en dessous de lui. Le joueur qui mange le carré empoisonné perd (et meurt dans d'atroces souffrances).

Caractéristiques de ce jeu:

- Somme nulle (un joueur gagne, l'autre perd)
- Durée finie
- Les joueurs jouent à tour de rôle
- Information parfaite
- Déterministe

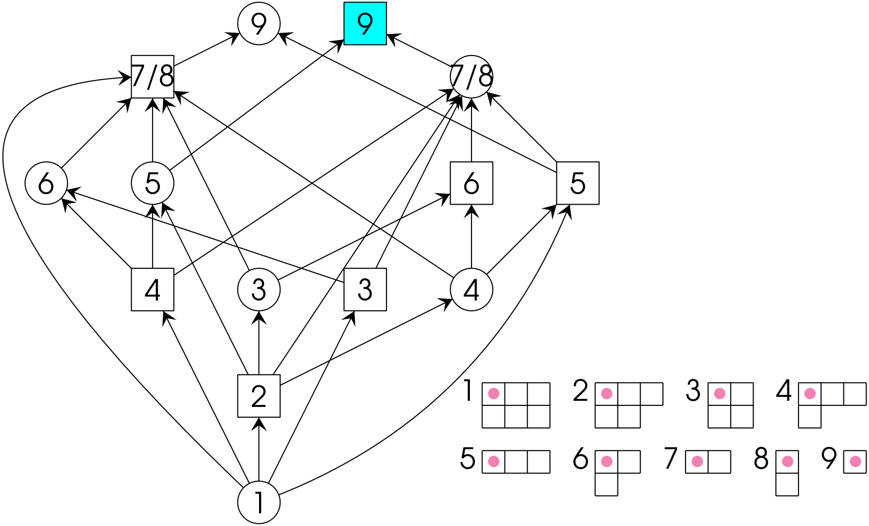
Pour nous c'est le plus simple des type de jeux (bien que l'on ne sache pas grand chose dessus. . .).

Configurations possibles:

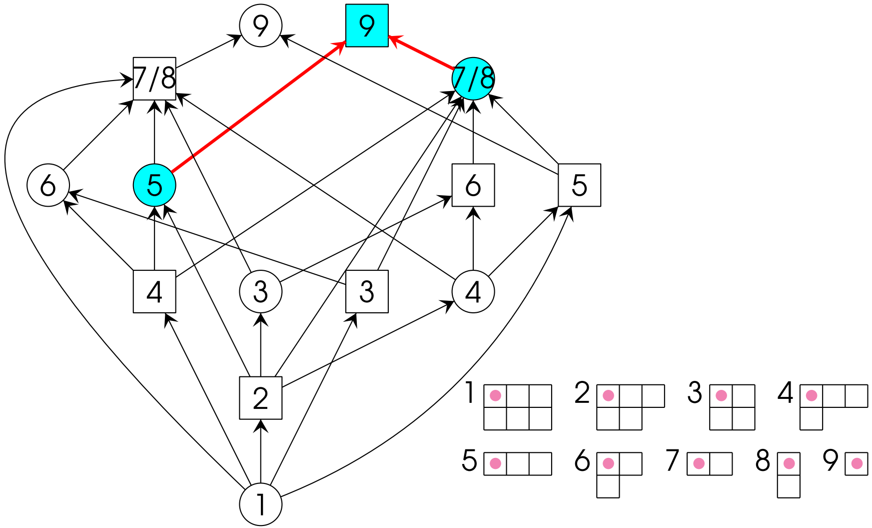


Modélisation du jeu pour une tablette 2×3

Arène associée:

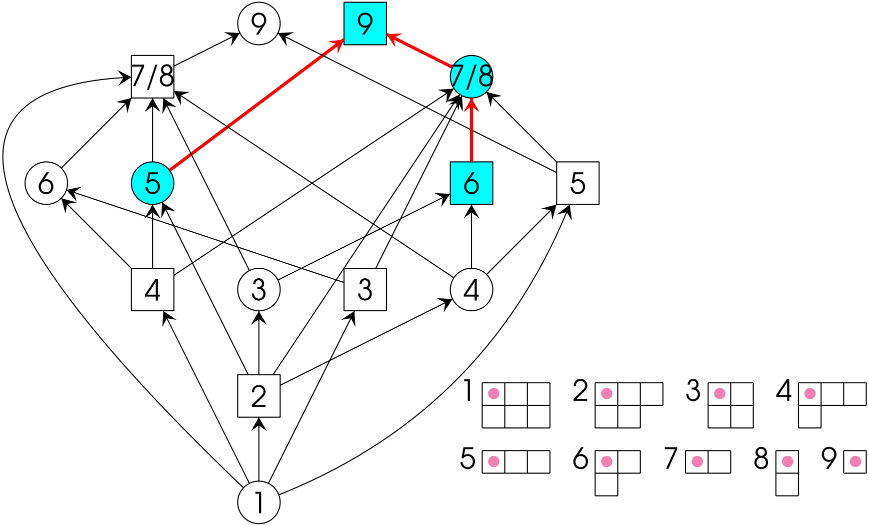


Arène associée:



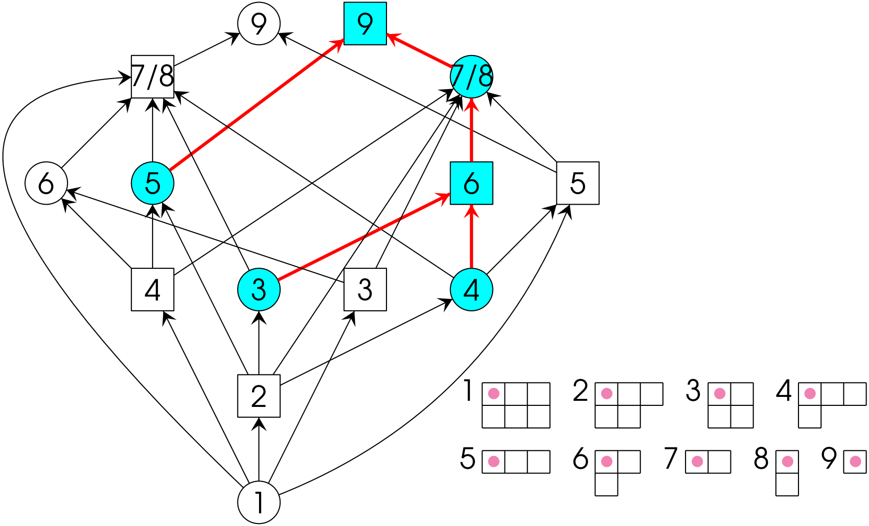
Modélisation du jeu pour une tablette 2×3

Arène associée:

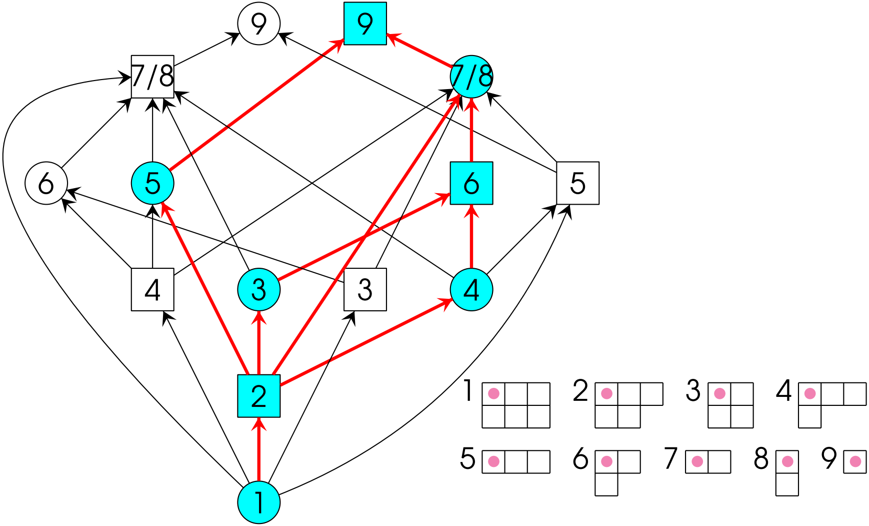


Modélisation du jeu pour une tablette 2×3

Arène associée:



Arène associée:



Étant donnée une tablette de taille $n \times m$ qui possède une stratégie gagnante?

Généralisation

Étant donnée une tablette de taille $n \times m$ qui possède une stratégie gagnante?

Pour cela on construit l'arène du jeu et on va appliquer la même méthode (algorithme) que dans le cas particulier précédent.

Généralisation

Étant donnée une tablette de taille $n \times m$ qui possède une stratégie gagnante?

Pour cela on construit l'arène du jeu et on va appliquer la même méthode (algorithme) que dans le cas particulier précédent.

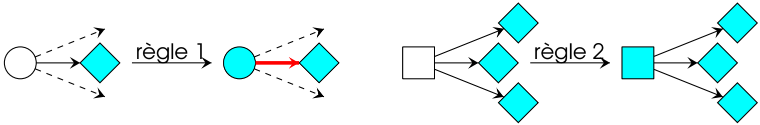
Idéalement, on veut que ça aille vite!

Jeu d'accessibilité: algorithme de résolution

Initialisation: les sommets finaux sont gagnants pour Eve.

Appliquer tant que c'est possible l'une des deux règles suivantes:

1. Un sommet d'Eve depuis lequel part un arc vers un sommet gagnant est aussi gagnant. Une stratégie pour Eve depuis ce sommet consiste à aller vers le sommet gagnant et à appliquer une stratégie gagnante depuis ce dernier.
2. Un sommet d'Adam dont tous les arcs vont vers des sommets gagnants pour Eve est gagnant pour Eve.

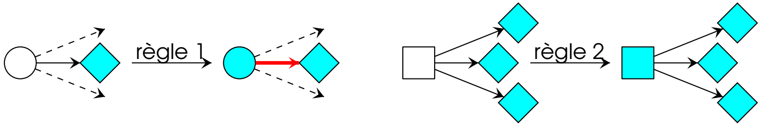


Jeu d'accessibilité: algorithme de résolution

Initialisation: les sommets finaux sont gagnants pour Eve.

Appliquer tant que c'est possible l'une des deux règles suivantes:

1. Un sommet d'Eve depuis lequel part un arc vers un sommet gagnant est aussi gagnant. Une stratégie pour Eve depuis ce sommet consiste à aller vers le sommet gagnant et à appliquer une stratégie gagnante depuis ce dernier.
2. Un sommet d'Adam dont tous les arcs vont vers des sommets gagnants pour Eve est gagnant pour Eve.



Théorème. L'algorithme précédent calcule l'ensemble des sommets gagnants pour Eve.

Explosion combinatoire

Combien de temps va mettre notre programme sur une tablette de taille $n \times m$?

- Il va falloir voir au moins une fois chaque configuration…

Explosion combinatoire

Combien de temps va mettre notre programme sur une tablette de taille $n \times m$?

- Il va falloir voir au moins une fois chaque configuration…

Combien y-a-t-il de configurations possibles?

- Cela revient à compter le nombre d'escalier: monter m fois et aller à droite n fois.
- Nombre de configurations possibles: $2C_n^{m+n} = \frac{2(m+n)!}{n!m!}$

Explosion combinatoire

Combien de temps va mettre notre programme sur une tablette de taille $n \times m$?

- Il va falloir voir au moins une fois chaque configuration…

Combien y-a-t-il de configurations possibles?

- Cela revient à compter le nombre d'escalier: monter m fois et aller à droite n fois.
- Nombre de configurations possibles: $2C_n^{m+n} = \frac{2(m+n)!}{n!m!}$

taille	5×5	8×8	10×10	30×30
nb. config.	504	25 740	369 512	$2{,}36 * 10^{17}$

Un ordinateur récent fait de l'ordre de 10^{11} opérations par secondes. Donc un peu plus de 2 mois pour traiter le cas 30×30…

Où l'on parle d'effectivité. . .

Quand Eve gagne l'algorithme précédent nous donne une preuve **effective** puisqu'il construit une stratégie gagnante.

Certaines preuves sont non effective

Quand Eve gagne l'algorithme précédent nous donne une preuve **effective** puisqu'il construit une stratégie gagnante.

Certaines preuves sont non effective

And the winner is...

Où l'on parle d'effectivité. . .

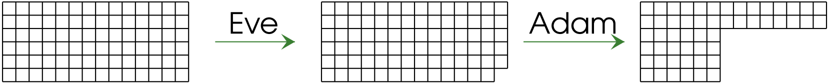
Quand Eve gagne l'algorithme précédent nous donne une preuve **effective** puisqu'il construit une stratégie gagnante.

Certaines preuves sont non effective

Où l'on parle d'effectivité. . .

Quand Eve gagne l'algorithme précédent nous donne une preuve **effective** puisqu'il construit une stratégie gagnante.

Certaines preuves sont non effective



Quand Eve gagne l'algorithme précédent nous donne une preuve **effective** puisqu'il construit une stratégie gagnante.

Certaines preuves sont non effective

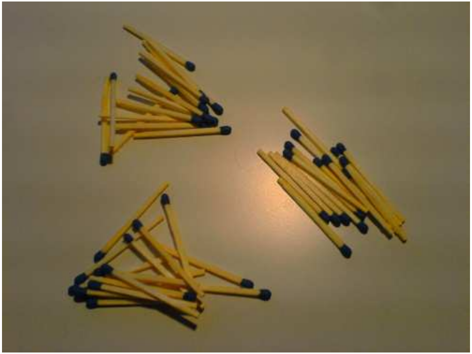
Où l'on parle d'effectivité. . .

Quand Eve gagne l'algorithme précédent nous donne une preuve **effective** puisqu'il construit une stratégie gagnante.

Certaines preuves sont non effective

Inconvénient : ce raisonnement (non constructif) ne construit pas de stratégie, qui d'ailleurs est inconnue dans le cas général.

Le jeu de Nim



On dispose de m tas d'allumettes.
A chaque tour de jeu, le joueur qui joue retire un nombre arbitraire d'allumettes d'un même tas.
Le joueur qui enlève la dernière allumette gagne.

Comment résoudre le jeu de Nim?

Comme tout à l'heure!

- Les configurations du jeu sont des m-uplets d'entiers + rond/carré selon qui joue.
- Le sommet à atteindre est celui où il ne reste plus d'allumette et où Adam doit jouer.
- On utilise ensuite le même algorithme que précédemment.

Comment résoudre le jeu de Nim?

Comme tout à l'heure!

- Les configurations du jeu sont des m-uplets d'entiers + rond/carré selon qui joue.
- Le sommet à atteindre est celui où il ne reste plus d'allumette et où Adam doit jouer.
- On utilise ensuite le même algorithme que précédemment.

Est-ce efficace/l'arène est-elle grosse?

- Si K est le nombre maximal d'allumettes par tas il y a moins de K^m configurations possibles. . .

Résolution efficace du jeu de Nim? (1/2)

Si l'on a une configuration $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ on va lui associer une valeur $G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ comme suit.

Exemple: $G(1, 9, 7, 10)$

Résolution efficace du jeu de Nim? (1/2)

Si l'on a une configuration $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ on va lui associer une valeur $G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ comme suit.

- On écrit chaque x_i en base 2.

Exemple: $G(1, 9, 7, 10)$

$$\begin{array}{ccllll} & & 8 & 4 & 2 & 1 \\ 1 & = & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 9 & = & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & = & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & = & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline \end{array}$$

Résolution efficace du jeu de Nim? (1/2)

Si l'on a une configuration $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ on va lui associer une valeur $G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ comme suit.

- On écrit chaque x_i en base 2.
- On somme par colonne en base 2 sans les retenues!

Exemple: $G(1, 9, 7, 10)$

$$\begin{array}{ccccccc}
 & & 8 & 4 & 2 & 1 \\
1 & = & 0 & 0 & 0 & 1 \\
9 & = & 1 & 0 & 0 & 1 \\
7 & = & 0 & 1 & 1 & 1 \\
10 & = & 1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}$$

Résolution efficace du jeu de Nim? (1/2)

Si l'on a une configuration $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ on va lui associer une valeur $G(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ comme suit.

- On écrit chaque x_i en base 2.
- On somme par colonne en base 2 sans les retenues!
- On convertit en décimal.

Exemple: $G(1, 9, 7, 10)$

$$
\begin{array}{ccccc c}
 & & 8 & 4 & 2 & 1 \\
1 & = & 0 & 0 & 0 & 1 \\
9 & = & 1 & 0 & 0 & 1 \\
7 & = & 0 & 1 & 1 & 1 \\
10 & = & 1 & 0 & 1 & 0 \\
\hline
 & & 0 & 1 & 0 & 1
\end{array}
$$

$G(1, 9, 7, 10) = 5.$

Résolution efficace du jeu de Nim? (2/2)

$$\begin{array}{rcccccc} 1 & = & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 9 & = & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & = & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & = & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

- La configuration sans allumette a pour valeur $G(0, \ldots, 0) = 0$.
- Depuis une configuration de valeur G nulle on atteint toujours une configuration de valeur G non nulle.
- Depuis une configuration de valeur G non-nulle on peut toujours atteindre une configuration de valeur G nulle.

Résolution efficace du jeu de Nim? (2/2)

$$\begin{array}{rcllll} 1 & = & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 9 & = & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & = & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & = & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

- La configuration sans allumette a pour valeur $G(0, \ldots, 0) = 0$.
- Depuis une configuration de valeur G nulle on atteint toujours une configuration de valeur G non nulle.
- Depuis une configuration de valeur G non-nulle on peut toujours atteindre une configuration de valeur G nulle.

$$\begin{array}{rcllll} 1 & = & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 9 & = & 1 & 0 & 0 & 1 \\ \color{red}{2} & = & \color{red}{0} & \color{red}{0} & \color{red}{1} & \color{red}{0} \\ 10 & = & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

Résolution efficace du jeu de Nim? (2/2)

$$\begin{array}{rcllll} 1 & = & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 9 & = & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 7 & = & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 10 & = & 1 & 0 & 1 & 0 \\ \hline & & 0 & 1 & 0 & 1 \end{array}$$

- La configuration sans allumette a pour valeur $G(0, \ldots, 0) = 0$.
- Depuis une configuration de valeur G nulle on atteint toujours une configuration de valeur G non nulle.
- Depuis une configuration de valeur G non-nulle on peut toujours atteindre une configuration de valeur G nulle.

Théorème. Les configurations gagnantes pour Eve sont exactement celles dont la valeur G est non nulle.
$\rightarrow$ Facile à calculer efficacement (idem pour la stratégie).

Conclusion

La théorie des jeux pose plusieurs questions informatiques intéressantes:

- Peut-on décider si un joueur a une stratégie gagnante?
- Peut-on calculer une telle stratégie?
- Certains jeux permettent des résolutions bien plus efficaces que la solution naïve.

Ce que vous allez voir en licence:

- Notion de décomposition en base 2.
- Modélisation informatique de problèmes.
- Algorithmique des graphes.
- Complexité des algorithmes.
- Et bien d'autres choses dont nous n'avons pas parlé aujourd'hui!